

МЕХАНИКА И НАДЕЖНОСТЬ МАШИН

УДК 539.375

В. А. ИБРАГИМОВ, С. В. ЧЕРНЯВСКАЯ

ВЛИЯНИЕ ДВУХОСНОСТИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НА КРИТЕРИЙ КВАЗИХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ ТЕЛА С ТРЕЩИНОЙ

Белорусский национальный технический университет

(Поступила в редакцию 20.04.2000)

Одним из недостатков общепринятой концепции Ирвина—Орована квазихрупкого разрушения тел с трещинами является, как известно, независимость критерия разрушения от влияния двухосности нагружения тела [1]. Именно при растяжении в двух направлениях упругой пластины с разрезом коэффициент интенсивности напряжений (КИН) зависит лишь от составляющей внешних усилий, перпендикулярной направлению разреза, тогда как продольная составляющая не влияет на значение КИН. Этот вывод находится в противоречии с многочисленными экспериментами для металлов и полимеров, согласно которым продольные растягивающие усилия увеличивают значение коэффициента и снижают прочность тела с трещиной.

Источником несоответствия является привлечение для вычисления КИН решения задачи о теле с трещиной в упругой постановке. Введение же в теорию поправки Ирвина на пластичность [1, 2], учитывающей наличие пластических деформаций в окрестности конца трещины, указанного несоответствия не устраняет, поскольку поправка найдена с помощью решения упругопластической задачи лишь для случая одноосного нагружения (например, [1]).

В данной работе получены решение указанной задачи в условиях двухосного нагружения тела и с его помощью формула для поправки на пластичность, учитывающая продольную компоненту внешней нагрузки. Рассмотрим упругоидеальнопластическое призматическое тело, ослабленное разрезом длины l . Как и в [1], будем рассматривать его антиплоское напряженно-деформированное состояние, которое отнесем к декартовой системе координат x, y, z , где оси x, y выбраны в плоскости поперечного сечения, ось z депланации перпендикулярна плоскости, причем начало отсчета совпадает с концом разреза. Имея в виду малость размера пластической зоны в сравнении с длиной трещины l и размерами тела в плане (условие квазихрупкости), достаточно решать задачу в сингулярной постановке для плоскости с полубесконечным разрезом $x < 0, y = 0$ (рис. 1). Берега разреза свободны от усилий

$$\sigma_{yz} = 0 \quad (x < 0, y = \pm 0) \quad (1)$$

(в дальнейшем индекс z у компонент тензоров опущен).

Материал тела считаем упругоидеальнопластическим, так что к концу разреза примыкает пластическая область V_2 , ограниченная на рис. 1 неизвестным упругопластическим контуром Γ , остальная часть плоскости V_1 является упругой областью.

Не приводя для краткости полную систему основных уравнений антиплоской задачи для упругопластического материала (например, [2]) укажем, что в упругой области V_1 комплексная комбинация касательных напряжений $\sigma_y + i\sigma_x$ является аналитической функцией комплексного аргумента $z = x + iy$. В пластической области выполняется условие текучести

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 = \tau_0^2 \quad (V_2), \quad (2)$$

где τ_0 — предел текучести при сдвиге. Линии скольжения в V_2 образуют центрированный веер и вдоль них выполняется соотношение [3]

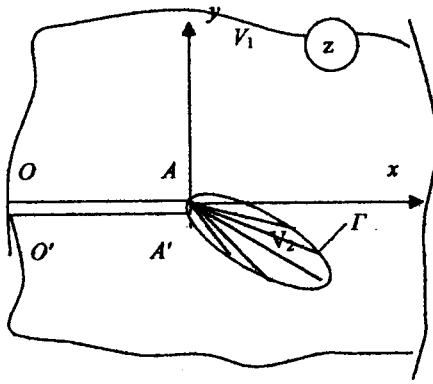


Рис. 1

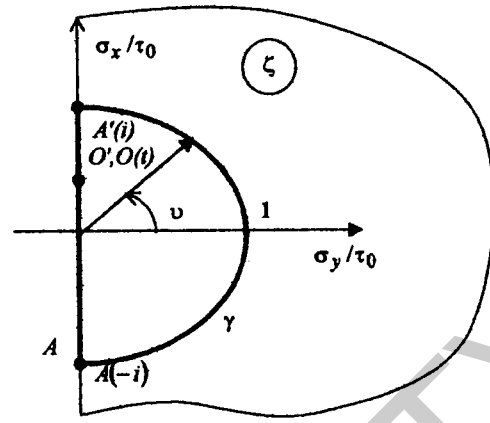


Рис. 2

$$x\sigma_x + y\sigma_y = 0 \quad (V_2). \quad (3)$$

Пусть к телу на достаточно большом удалении от конца разреза ($x, y \gg l$) приложена система сдвигающих усилий $\sigma_y^\infty = p$, $\sigma_x^\infty = q$. В сингулярной постановке задачи последнее соответствует асимптотике напряжений

$$\sigma_y + i\sigma_x \sim \frac{K}{\sqrt{2\pi z}} + iq \quad (z \rightarrow \infty) \quad (4)$$

с коэффициентом интенсивности напряжений K , зависящим лишь от «поперечной» составляющей p нагрузок и вычисляемым для конкретных конфигураций тела с трещиной на основе известных методов определения КИН для упругих сред (например, $K = p\sqrt{\pi l}$ для плоскости с разрезом длины $2l$ и т. п.).

Воспользуемся методом годографа напряжений [2—4] и введем в рассмотрение вспомогательную плоскость комплексного переменного $\zeta = (\sigma_y + i\sigma_x) / \tau_0$. Функция $\zeta = \zeta(z)$ переменного $z = x + iy$ аналитична в области V_1 [2] и, как можно проверить, конформно отображает V_1 на полукруг $W(\zeta\bar{\zeta} < 1, \zeta_1 = \text{Re } \zeta > 0)$ в плоскости ζ . Соответствие точек при отображении указано на рис. 2 одноименными буквами (O, O' — бесконечно удаленные точки); берегам $OA, O'A'$ разреза соответствуют отрезки $oa, o'a'$ вертикального диаметра. При этом, согласно (4), имеем $\sigma_y + i\sigma_x \rightarrow q$ при $z \rightarrow \infty$, поэтому координата ζ сдвоенной точки o, o' равна $t = iq/\tau_0$. Образом пластической области V_2 при отображении, согласно (2), является полукружность $\gamma(\zeta\bar{\zeta} = 1, \zeta_1 > 0)$.

Обратная к $\zeta(z)$ функция $z(\zeta)$ является аналитической в W и подлежит отысканию. Краевое условие на $oa, o'a'$ вследствие равенства $y = 0$ на берегах разреза запишется

$$\text{Im } z(\zeta) = 0 \quad (oa, o'a'). \quad (5)$$

Кроме того, $x\sigma_x + y\sigma_y = \tau_0 \text{Im}(\zeta z)$, поэтому соотношение (3) запишется таким образом:

$$\text{Im}(\zeta z(\zeta)) = 0 \quad (\gamma). \quad (6)$$

Из (4) следует, что $\zeta\tau_0 - iq \sim K / \sqrt{2\pi z}$ при $z \rightarrow \infty$, и функция $\zeta(z)$ имеет особую точку — полюс $\zeta = t$ вида

$$z(\zeta) \sim K^2 / 2\pi\tau_0^2(\zeta - t)^2 \quad (\zeta \rightarrow t). \quad (7)$$

Решение линейной задачи Римана—Гильберта выражений (5)—(7) отыскивается известными методами [5]. Для удобства введем аналитическую в W функцию $f(s) = \zeta z(\zeta)$ и продолжим ее внутрь полукруга $\zeta\bar{\zeta} < 1, \text{Re } \zeta < 0$ по правилу

$$f(\zeta) = -\overline{f(-\bar{\zeta})}. \quad (8)$$

Согласно формулам (1), (5), на берегах разреза $\operatorname{Re} \zeta = 0$, $\operatorname{Im} z = 0$, откуда

$$\operatorname{Re} f(\zeta) = \operatorname{Re}(\zeta z(\zeta)) = 0 \quad (oa, o'a')$$

и продолжение (8) аналитично в круге $\zeta \bar{\zeta} < 1$, за исключением точки $\zeta = t$. Аналогично вне единичного круга продолжим $f(\zeta)$ по формуле

$$f(\zeta) = \overline{f(1/\bar{\zeta})}. \quad (9)$$

Согласно (6), имеем $\operatorname{Im} f = 0$ на полуокружности γ и с учетом формулы (8) на полуокружности $\zeta \bar{\zeta} = 1$, $\operatorname{Im} \zeta < 0$, поэтому правило (9) обеспечивает аналитичность $f(\zeta)$ в плоскости ζ , кроме полюсов $\zeta = t$, $\zeta = 1/\bar{t}$. Для последних с учетом выражений (7)–(9) будет

$$f(\zeta) \sim \frac{K^2 t}{2\pi\tau_0^2(\zeta - t)^2} (\zeta \rightarrow t); f(\zeta) \sim \frac{K^2}{2\pi\tau_0^2 t(1 - \bar{t}\zeta)^2} (\zeta \rightarrow 1/\bar{t}). \quad (10)$$

Решение задачи, удовлетворяющее формулам (8)–(10), и искомая функция $z(\zeta)$ запишутся так:

$$z(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta} = \frac{K^2}{2\pi\tau_0^2} \left(\frac{1}{(\zeta - t)^2} + \frac{1}{(1 - \bar{t}\zeta)^2} \right). \quad (11)$$

Искомое поле напряжений в упругой области V_1 определяется обратной к выражению (11) функцией $\zeta = (\sigma_y + i\sigma_x)/\tau_0$ от $z = x + iy$. Напряжения в пластической области V_2 даются формулами

$$\sigma_y = \tau_0 y/r, \sigma_x = -\tau_0 x/r \quad (r^2 = x^2 + y^2). \quad (12)$$

Параметрические уравнения упругопластического контура Γ , разделяющего V_1 и V_2 , получаются из формулы (11) при $\zeta = \exp i\theta$ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$). В частном случае одноосного нагружения ($q = t = 0$) найденное решение совпадает с [1].

Не приводя здесь громоздких преобразований, укажем также, что в отличие от [1] при двухосном нагружении пластическая зона имеет овальную форму с диаметром (наибольшим расстоянием на Γ от контура разреза), наклоненным относительно оси x .

Рассмотрим асимптотику решения (11) в упругой области при $\zeta \rightarrow t$ ($z \rightarrow \infty$). Опуская в выражении (11) бесконечно малые величины, имеем

$$z(\zeta) = \frac{K^2}{2\pi\tau_0^2} \left(\frac{1}{(\zeta - t)^2} + \frac{1}{(1 - \bar{t}\zeta)^2} \right) \quad (\zeta \rightarrow t).$$

Разрешим последнее уравнение относительно напряжений

$$\sigma_y + i\sigma_x = \frac{K}{\sqrt{2\pi(z - d)}} + iq \quad (z \rightarrow \infty), \quad (13)$$

где обозначено

$$d = \frac{K^2}{2\pi\tau_0^2(1 - \bar{t}t)} = \frac{K^2}{2\pi\tau_0^2(1 - q^2/\tau_0^2)}. \quad (14)$$

При $q = 0$ (14) совпадает со значением радиуса круговой пластической зоны $d_0 = K^2/2\pi\tau_0^2$ [1], причем в общем случае $d > d_0$ при $q \neq 0$.

Для отыскания поправки на пластичность асимптотику (13) следует сравнить с решением той же задачи о плоскости с полубесконечным разрезом для упругого тела [1]. Последнее является частным случаем (11)–(13) при $\tau_0 \rightarrow \infty$ или усматривается непосредственно из краевых условий (1), (4):

$$\sigma_y + i\sigma_x = \frac{K}{\sqrt{2\pi z}} + iq. \quad (15)$$

Из формул (13), (15) видно, что упругое решение сохраняет асимптотический смысл и для упругопластического тела (при условии малости пластической зоны), если ввести к длине трещины поправку на пластичность d и при вычислении КИН заменить l на $l + d$. Например, для упругопластической плоскости с трещиной длины $2l$ имеем $K = p\sqrt{\pi(l + d)}$ и критерий квазихрупкого разрушения $K = K_c$ Ирвина—Орвана запишется (K_c — вязкость разрушения)

$$p = \frac{K_c}{\sqrt{\pi(l + d)}}. \quad (16)$$

Поскольку для двухосного нагружения поправка d формулы (14) превышает значение d_0 для одноосного нагружения, то, как видно из выражения (15), наличие сдвигового усилия q , направленного вдоль трещины, снижает значение критического усилия p , что согласуется с экспериментом.

Литература

1. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М., 1974.
2. Ибрагимов В. А., Махнач В. И., Швед О. Л. Метод обобщенных аналитических представлений в антиплоской упругопластической задаче. Мн., 1998.
3. Ключников В. Д. Математическая теория пластичности. М., 1979.
4. Ибрагимов В. А. // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 1. С. 135—144.
5. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.

V. A. IBRAGIMOV, S. V. CRERNYAVSKAYA

THE INFLUENCE OF STRESS STATE BIAXIALITY ON FRACTURE CRITERION FOR THE SOLID WITH A CRACK

Summary

The solution of antiplane problem for elastic perfectly plastic body with semi-infinite crack loaded by biaxial external forces is given and the formula for effective crack length involving the force component along the crack is obtained.